Unidad 6

Rentas fraccionadas y variables

6.1. Introducción

6.2. Rentas con fraccionamiento uniforme

6.2.1. Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas

6.3. Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

6.4. Rentas de términos variables en progresión geométrica

6.4.1. Renta pospagable temporal

6.4.2. Renta pospagable perpetua

6.4.3. Renta prepagable temporal

6.4.4. Renta prepagable perpetua

6.4.5. Renta diferida y anticipada

6.5. Rentas de términos variables en progresión aritmética

6.5.1. Renta pospagable temporal

6.5.2. Renta pospagable perpetua

6.5.3. Renta prepagable temporal

6.5.4. Renta prepagable perpetua

6.5.5. Renta diferida y anticipada

6.6. Rentas variables fraccionadas

6.6.1. Rentas variables fraccionadas en progresión geométrica

6.6.2. Rentas variables fraccionadas en progresión aritmética

6.7. Rentas variables en general con rédito periodal constante

6.7.1. Determinación de i. Método de Newton

6.7.2. Hoja de cálculo

6.7.3. Simplificación de Schneider

Ejercicios propuestos

6.1. Introducción

En la aplicación práctica del estudio de las rentas, podemos encontrarnos con que los términos de las mismas no necesariamente han de ser uniformes en toda su duración. Del mismo modo, tampoco los términos han de coincidir con los años naturales. Es muy habitual que éstos, en las operaciones financieras de inversión o financiación, sean mensuales, trimestrales, etc.

Igualmente, los términos no necesariamente serán constantes a lo largo de toda la duración de la misma. Es frecuente encontrarse con rentas crecientes en un porcentaje e incluso, con rentas variables en general.

Las *rentas fraccionadas* son aquellas en las que la periodicidad con que se hacen efectivos los sucesivos capitales es inferior al año, produciéndose pagos y cobros mensualmente, trimestralmente, semestralmente, etc.

En una renta fraccionada constante una serie de capitales de la misma cuantía están disponibles en fracciones consecutivas de año, llamadas m, durante n años. El número de términos total es $n\,m$.

6.2. Rentas con fraccionamiento uniforme

En este caso el período de capitalización es superior al período en que se percibe la renta, es decir, nos dan el interés efectivo anual i, mientras que el término C de la renta se percibe m veces dentro del año. Para encontrar el valor en este tipo de rentas fraccionadas, tendremos también que referir ambos parámetros *término* y *tanto* a la misma unidad.

Si el tanto de valoración es el nominal anual $J^{(m)}$, entonces, tal como vimos en (4.7) en la página 38, el valor de $i^{(m)}$ sería:

$$J^{(m)} = m\, i^{(m)} \qquad\qquad i^{(m)} = \frac{J^{(m)}}{m}$$

Para calcular el interés periódico $i^{(m)}$ a partir del tanto efectivo anual i dado y valorar la renta teniendo en cuenta que la duración de la misma es de $n\,m$ períodos, siendo $t = n\,m$, utilizamos la ecuación de los tantos equivalentes, vista en (4.6) en la página 37.

$$i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

y en consecuencia, como hemos visto en (5.1) en la página 49, el valor actual sería:

$$\mathrm{a}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-n\,m}}{i^{(m)}} \tag{6.1}$$

■

expresión que nos da el valor actual de la renta unitaria y generalizando, el valor actual de una renta constante, temporal, inmediata y pospagable de término C, duración $n\,m$ períodos a interés $i^{(m)}$, y de acuerdo con (6.1), será:

$$V_0^{(m)} = C\ \mathrm{a}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} \qquad\qquad V_0^{(m)} = C\ \frac{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-n\,m}}{i^{(m)}} \tag{6.2}$$

■

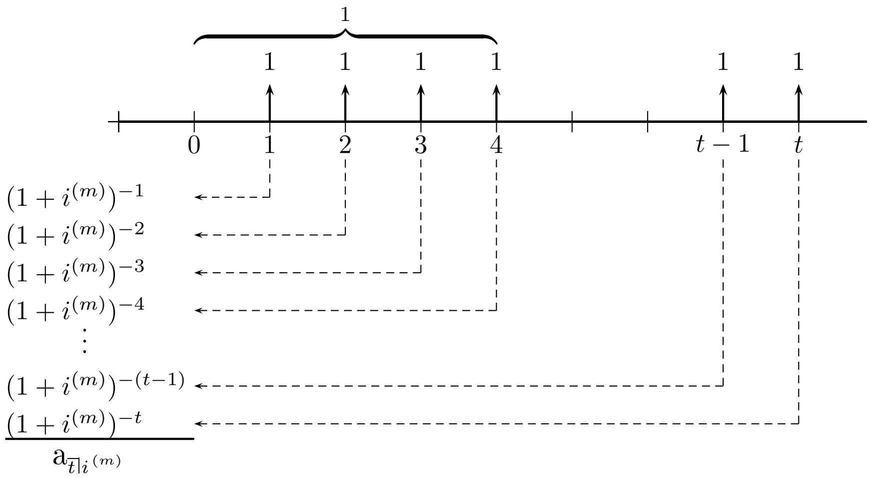

Figura 6.1: Valor actual de una renta unitaria fraccionada

Una representación gráfica puede verse en la figura 6.1.

Este método, lo podemos considerar como genérico para la resolución de las rentas fraccionadas y es el que vamos a utilizar para obtener el valor actual o final de una renta pospagable o prepagable fraccionada, sea de duración determinada o perpetua.

Si se trata del valor final,

$$s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}-1}{i^{(m)}} \tag{6.3}$$

■

generalizando,

$$V_n^{(m)} = C\; s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} \qquad\qquad V_n^{(m)} = C\;\frac{\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}-1}{i^{(m)}}$$

$$V_n^{(m)} = C\; a_{\overline{n\,m}|i^{(m)}}\;\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \tag{6.4}$$

■

Ejemplo 6.1 Determinar el valor actual de una renta de 5 años de duración, al 7 % de interés anual efectivo y los términos son de 850 € trimestrales.

En primer lugar, obtendríamos el tipo de interés efectivo trimestral,

$$i^{(4)} = (1+0,07)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,0170585$$

para obtener el valor actual utilizando la expresión (6.2).

$$V_0 = 850\; a_{\overline{20}|0,0170585} = 14\,301,46$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener V_0, obtenemos $i^{(4)}$ en primer lugar:

4 [n] 100 [PV] 7 [+] [CHS] [FV] [i] resultando 1,70585

20 [n] 850 [CHS] [PMT] 0 [FV] [PV] obteniendo la respuesta de 14 301,46

Si se trata del valor actual en una renta fraccionada cuyos términos sean prepagables, éste será igual al valor actual de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada, inmediata y pospagable multiplicado por $\left(1+i^{(m)}\right)$. En este caso,

$$\ddot{a}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-n\,m}}{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-1}} = \frac{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-n\,m}}{i^{(m)}}\left(1+i^{(m)}\right) \tag{6.5}$$

y, el valor final,

$$\ddot{s}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}-1}{i^{(m)}}\left(1+i^{(m)}\right) \tag{6.6}$$

■

Se verifica por tanto la relación entre el valor actual y final:

$$s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = a_{\overline{n\,m}|i^{(m)}}\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \tag{6.7}$$

por ser $\left(1+i^{(m)}\right)^{n}$ el factor de capitalización en el intervalo $[0,m]$.

Si se trata de rentas fraccionadas perpetuas, su valor actual, vendrá expresado por:

$$a_{\overline{\infty}|i^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} \tag{6.8}$$

■

En el caso de que la renta fraccionada perpetua unitaria sea prepagable, su valor actual, será:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i^{(m)}} = 1+\frac{1}{i^{(m)}} \tag{6.9}$$

■

Ejemplo 6.2 ¿Qué capital debemos depositar en un banco que nos abona el 0,5 % mensual si pretendemos obtener una renta de 1 000 € mensuales?

$$V_0 = 1\,000\ a_{\overline{\infty}|0{,}005} = \frac{1\,000}{0,005} = 200\,000$$

Otra forma de valorar las rentas fraccionadas consiste, en primer lugar, en sustituir todos los pagos que se realizan en una año cualquiera por un solo pago equivalente al final del año C' (dado que en todos los años se repite la misma forma de pago) y luego valorar la renta anual y constante que resulta:

$$C' = \frac{C}{m}\ s_{\overline{m}|i^{(m)}} = \frac{C}{m}\ \frac{\left(1+i^{(m)}\right)-1}{i^{(m)}} = C\ \frac{i}{J^{(m)}}$$

por tanto, los m pagos que se realizan en el primer año forman una renta cuyo valor final C' es:

$$C' = C\ \frac{i}{J^{(m)}}$$

En consecuencia, partiendo de la ecuación (5.2) de la página 49, los valores actual y final, serían:

$$V_0^{(m)} = C\ \frac{i}{J^{(m)}}\ a_{\overline{n}|i} \tag{6.10}$$

y

$$V_n^{(m)} = C\ \frac{i}{J^{(m)}}\ s_{\overline{n}|i} \tag{6.11}$$

■

6.2.1. Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas

El valor actual de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada y diferida p períodos, es igual al valor actual de una renta temporal, constante, unitaria y fraccionada actualizado por los períodos de diferimiento, es decir, multiplicando su valor actual por $\left(1+i^{(m)}\right)^{-pm}$. Esto es,

$$_{p/}\mathrm{a}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \left(1+i^{(m)}\right)^{-p\,m} \mathrm{a}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} \tag{6.12}$$

■

Igual ocurre con la obtención del valor final de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada y anticipada h períodos, debiendo multiplicar en este caso el valor de la renta fraccionada por su anticipación $\left(1+i^{(m)}\right)^{h\ m}$.

$$_{h/}\mathrm{s}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \left(1+i^{(m)}\right)^{h\,m} \mathrm{s}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} \tag{6.13}$$

■

6.3. Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

En las rentas constantes, inmediatas y temporales, podemos escribir la siguiente ecuación general que nos permite obtener cualquiera de las cinco variables financieras típicas.

$$V_0 + (1+i\ \mu)\ C \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + V_n\ (1+i)^{-n} = 0 \tag{6.14}$$

■

En la que si $\mu = 0$, se tratará de una renta pospagable, siendo por tanto $(1+i\ \mu) = 1$. Si la renta es prepagable, $\mu = 1$ y en consecuencia $(1+i\ \mu) = (1+i)$ que es el factor que convierte una renta pospagable en prepagable tal como hemos visto en (5.8).

Si $C = 0$ nos encontraríamos en un supuesto de capitalización compuesta, pudiendo obtener los valores de C_0 ó V_0 y C_n ó V_n, ya que:

$$V_0 + V_n\ (1+i)^{-n} = 0$$

6.4. Rentas de términos variables en progresión geométrica

Se caracterizan porque la cuantía de sus términos varían en progresión geométrica. La razón de la progresión, que representamos por q ha de ser positiva, es decir $q > 0$, puesto que en caso contrario todos los términos con exponente de q impar tendrían cuantía negativa[1].

Si $q > 1$, la renta será creciente. Si $0 < q < 1$, los términos de la renta serán decrecientes.

Dentro de las rentas geométricas cabe hacer todas las hipótesis que para las constantes hemos hecho sobre el vencimiento de los términos (pospagable y prepagable), en relación a la duración (temporal o perpetua) y con respecto al punto de valoración (inmediata, diferida o anticipada).

[1]Puede verse el apéndice A.6 en la página 152 referido a las progresiones geométricas

6.4.1. Renta pospagable temporal

El valor actual de una renta pospagable, inmediata, temporal y variable en progresión geométrica, de primer término C y razón q, con una duración de n años al tipo de interés i, será:

$$\begin{aligned} V_0(C,q)_{\overline{n}|i} &= C\ (1+i)^{-1} + C\ q\ (1+i)^{-2} + C\ q^2\ (1+i)^{-3} + \cdots + \\ &+ C\ q^{(n-2)}\ (1+i)^{-(n-1)} + C\ q^{(n-1)}\ (1+i)^{-n} \end{aligned}$$

que representa una serie en progresión geométrica de razón $q\ (1+i)^{-1}$; por tanto, su suma, aplicando A.11 en la página 153 será:

$$\begin{aligned} V_0(C,q)_{\overline{n}|i} &= \frac{C\ (1+i)^{-1} - C\ q^{(n-1)}\ (1+i)^{-n}\ q\ (1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}\ q} = \\ &= C\ \frac{1-q^{(n-1)}\ (1+i)^{-n}\ q}{\dfrac{1}{(1+i)^{-1}} - q} = C\ \frac{1-q^n\ (1+i)^{-n}}{1+i-q} \end{aligned}$$

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = C\ \frac{1-q^n\ (1+i)^{-n}}{1+i-q} \tag{6.15}$$

■

El valor final se obtendrá capitalizando el valor actual, esto es, multiplicándolo por su factor de capitalización compuesta $(1+i)^n$.

$$V_n(C,q)_{\overline{n}|i} = V_0(C,q)_{\overline{n}|i}\ (1+i)^n \tag{6.16}$$

y sustituyendo,

$$V_n(C,q)_{\overline{n}|i} = C\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} \tag{6.17}$$

■

Ejemplo 6.3 Dada una renta variable en progresión geométrica de primer término 10 000 € que se incrementa anualmente un 20 %, si la duración de la misma es de 15 años y el interés del 6 % efectivo, se pide determinar el valor actual y final de la misma.

Utilizando (6.15):

$$V_0(10\,000; 1,2)_{\overline{15}|0,06} = 10\,000\ \frac{1-1,2^{15}(1+0,06)^{-15}}{1+0,06-1,2} = 10\,000\ \frac{-5,4288}{-0,14} = 387\,772,27$$

Del mismo modo, sirviéndose de la relación entre el valor actual y final,

$$V_n(C,q)_{\overline{n}|i} = V_0(C,q)_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n$$

$$V_{15} = V_0(1+0,06)^{15} = 387\,772,27\ (1+0,06)^{15} = 929\,318,81$$

La razón q en muchos casos viene dada en porcentaje, por lo que en la expresión (6.15), al igual que hacemos con el tipo de interés, se reflejará en tanto por uno. Al respecto, estudiando la relación de q con respecto a $(1+i)$,

$q < (1+i)$ es el caso normal,

$q > (1+i)$ implica obtener un valor negativo, pero al ser el numerador también negativo la solución es positiva,

$q = (1+i)$ da como resultado una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para resolverla se procederá a la actualización de cada uno de los capitales al punto de origen de la renta.

En este caso,

$$V_0(C, 1+i)_{\overline{n}|i} = \lim_{q \to 1+i} C \left[\frac{1 - q^n (1+i)^{-n}}{1+i-q} \right] = \frac{0}{0} =$$

Aplicando L'Hôpital respecto a q, para resolver la indeterminación,

$$= \frac{-(1+i)^{-n}\ n\ q^{n-1}}{-q} = n\ C\ (1+i)^{-1}$$

6.4.2. Renta pospagable perpetua

En el supuesto de que se trate de una renta perpetua, para su cálculo, bastará con hacer tender n a infinito en la expresión de su valor actual (6.15),

$$V_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n \to \infty} V_0(C, q)_{\overline{n}|i} = \frac{C}{1+i-q}$$

$$V_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{1+i-q} \tag{6.18}$$

para $1 + i > q$. ■

6.4.3. Renta prepagable temporal

Si se trata de una renta prepagable, partiendo del principio de equivalencia financiera y del valor actual de una renta pospagable, inmediata, variable en progresión geométrica y temporal, tal como hemos visto en (6.15),

$$\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} = V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1+i) \tag{6.19}$$

Igualmente, si se trata del valor final de una renta prepagable, bastará con actualizar el valor final de la renta pospagable, inmediata, variable en progresión geométrica y temporal.

$$\ddot{V}_n(C, q)_{\overline{n}|i} = V_n(C, q)_{\overline{n}|i} (1+i) \tag{6.20}$$

Del mismo modo, partiendo del valor actual, podríamos capitalizar el mismo usando el factor de capitalización para obtener su valor final:

$$\ddot{V}_n(C, q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1+i)^n \tag{6.21}$$

6.4.4. Renta prepagable perpetua

En el supuesto de tratarse de una renta perpetua, la obtención del límite cuando n tiende a infinito del valor actual de la renta prepagable nos permitirá obtener su valor.

$$\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n \to \infty} \ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} = \frac{C\ (1+i)}{1+i-q}$$

$$\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C\ (1+i)}{1+i-q} \tag{6.22}$$

6.4.5. Renta diferida y anticipada

La obtención del valor actual de una renta diferida p períodos, pospagable, temporal y variable en progresión geométrica, tal como vimos para una renta constante en la figura 5.6 de la página 54, y la expresión (5.11),

$$_{p}/V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = V_0(C,q)_{\overline{n}|i}\ (1+i)^{-p} \tag{6.23}$$

Si se trata de una renta prepagable, procederemos del mismo modo:

$$_{p}/\ddot{V}_0(C,q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C,q)_{\overline{n}|i}\ (1+i)^{-p} \tag{6.24}$$

Cuando se trata de una renta perpetua, el valor actual, será el que corresponde a una temporal sobre la que obtendremos el límite cuando n tiende a ∞.

$$_{p}/V_0(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} {}_{p}/V_0(C,q)_{\overline{n}|i}$$

$$_{p}/V_0(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C\ (1+i)^{-p}}{1+i-q} \tag{6.25}$$

Si fuera prepagable,

$$_{p}/\ddot{V}_0(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C\ (1+i)^{-(p-1)}}{1+i-q} \tag{6.26}$$

En las rentas anticipadas, para la obtención del valor final puede aplicarse lo visto en la unidad anterior. El valor final, pospagable y temporal,

$$_{h}/V_n(C,q)_{\overline{n}|i} = V_n(C,q)_{\overline{n}|i}\ (1+i)^{h} \tag{6.27}$$

Si la renta es prepagable,

$$_{h}/\ddot{V}_n(C,q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_n(C,q)_{\overline{n}|i}\ (1+i)^{h} \tag{6.28}$$

■

6.5. Rentas de términos variables en progresión aritmética

Se caracterizan por seguir la cuantía de sus términos una progresión aritmética, siendo d la razón de la progresión, que puede ser positiva o negativa, si bien en este segundo caso, al ser los términos decrecientes, para que no aparezcan términos negativos o nulos es preciso imponer la condición $C + (n-1)d > 0$, lo que implica que la razón d está acotada inferiormente por:

$$d > \frac{-C}{n-1}$$

6.5.1. Renta pospagable temporal

La obtención del valor actual que designaremos como $V_0(C,d)_{\overline{n}|i}$ es:

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} \big[C + (s-1)d\big](1+i)^{-s} = C\ \mathrm{a}_{\overline{n}|i} + d\sum_{s=1}^{n}(s-1)(1+i)^{-s}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = C\ \mathrm{a}_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i}\left[\mathrm{a}_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right]$$

de donde,

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right)\mathrm{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d\ n(1+i)^{-n}}{i}$$

sumando y restando $\dfrac{d\ n}{i}$ se obtiene la expresión:

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i} + d\ n\right)\mathrm{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d\ n}{i} \tag{6.29}$$

que resulta más cómoda al venir expresada en función de $\mathrm{a}_{\overline{n}|i}$ ■

El valor final, $V_n(C,d)_{\overline{n}|i}$ puede obtenerse de forma directa:

$$V_n(C,d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}\left[C + (s-1)d\right](1+i)^{n-s}$$

o también, capitalizando el valor actual, es decir, multiplicando por $(1+i)^n$

$$V_n(C,d)_{\overline{n}|i} = V_0(C,d)_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \left[\left(C + \frac{d}{i}\right)\mathrm{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d\ n(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^n$$

resultando,

$$V_n(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right)\mathrm{s}_{\overline{n}|i} - \frac{d\ n}{i} \tag{6.30}$$

■

6.5.2. Renta pospagable perpetua

El valor inicial de una renta perpetua es el límite cuando $n \to \infty$ de la correspondiente renta temporal, por tanto, el valor actual de la renta pospagable, variable en progresión aritmética perpetua es:

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(C + \frac{d}{i}\right)\mathrm{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d\ n(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

y dado que:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{a}_{\overline{n}|i} = \mathrm{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} n(1+i)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n \log_e(1+i)} = 0$$

resulta:

$$V_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right)\ \frac{1}{i} = \frac{C}{i} + \frac{d}{i^2} \tag{6.31}$$

6.5.3. Renta prepagable temporal

Si se trata en este caso de una renta temporal prepagable, su valor actual puede obtenerse en función de $V_0(C,d)_{\overline{n}|i}$:

$$\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1} \big[C + s\ d\big](1+i)^{-s} =$$
$$= (1+i)\sum_{s=1}^{n} \big[C + (s-1)\ d\big](1+i)^{-s} = V_0(C,d)_{\overline{n}|i}\ (1+i)$$

resultando por tanto,

$$\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)\left[\left(C + \frac{d}{i} + d\ n\right) \mathrm{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d\ n}{i}\right] = V_0(C,d)_{\overline{n}|i}\ (1+i) \tag{6.32}$$

Igualmente, el valor final prepagable, se obtendrá capitalizando el valor actual:

$$\ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i}\ (1+i)^n \tag{6.33}$$

o directamente,

$$\ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n}|i} = V_n(C,d)_{\overline{n}|i}\ (1+i) \tag{6.34}$$

■

6.5.4. Renta prepagable perpetua

Si se trata de una renta prepagable perpetua, el valor inicial de la renta variable en progresión aritmética se obtiene:

$$\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \ddot{V}(C,d)_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} (1+i)\ V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)\ V_0(C,d)_{\overline{n}|i}$$

resultando,

$$\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right)\ \frac{1+i}{i} \tag{6.35}$$

■

6.5.5. Renta diferida y anticipada

Del mismo modo que para las rentas variables en progresión geométrica, si la renta está diferida en p períodos de rédito constante i respecto del punto de valoración, su valor actual se obtiene multiplicando el valor inicial por $(1+i)^{-p}$. Si la renta está anticipada en h períodos de igual rédito i, su valor final será igual al valor final multiplicado por $(1+i)^h$.

$$_{p/}V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\ V_0(C,d)_{\overline{n}|i} \tag{6.36}$$

sustituyendo,

$$_{p/}V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\left[\left(C + \frac{d}{i} + d\ n\right) \mathrm{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d\ n}{i}\right]$$

Si es prepagable,

$$_{p/}\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\ \ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i} \tag{6.37}$$

Si se trata de una renta perpetua, procederemos del mismo modo:

$$_{p}/V_0(C,d)_{\overline{\infty|}i} = (1+i)^{-p}\ V_0(C,d)_{\overline{\infty|}i} \tag{6.38}$$

$$_{p}/\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{\infty|}i} = (1+i)^{-p}\ \ddot{V}_0(C,d)_{\overline{\infty|}i} \tag{6.39}$$

Si se trata de una renta anticipada, su valor final, será:

$$_{h}/V_n(C,d)_{\overline{n|}i} = (1+i)^{h}\ V_n(C,d)_{\overline{n|}i} \tag{6.40}$$

y sustituyendo,

$$_{h}/V_n(C,d)_{\overline{n|}i} = (1+i)^{h}\ \left[\left(C+\frac{d}{i}\right) s_{\overline{n|}i} - \frac{d\,n}{i}\right]$$

que en el supuesto de que fuera prepagable, sería:

$$_{h}/\ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n|}i} = (1+i)^{h}\ \ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n|}i} \tag{6.41}$$

■

Ejemplo 6.4 Determinar el valor en el momento actual de una renta anual variable en progresión aritmética, de primer término 10 000 €, razón 2 000 €, rédito periodal constante $i = 0,06$, que comenzará a devengarse una vez transcurridos 3 años, en los supuestos de que se trate de una renta prepagable de 20 años de duración o de una renta pospagable perpetua.

En el primer supuesto,

$$_{3}/\ddot{V}_0(10\,000;2\,000)_{\overline{20|}0,06} = (1+0,06)^{-3}\ddot{V}_0(10\,000;2\,000)_{\overline{20|}0,06}$$

$$\begin{aligned}\ddot{V}_0 &= (1+0,06)^{-2}V_0(10\,000;2\,000)_{\overline{20|}0,06} = \\ &= 1,06^{-2}\left[\left(10\,000+\frac{2\,000}{0,06}+2\,000\cdot 20\right) a_{\overline{20|}0,06} - \frac{2\,000\cdot 20}{0,06}\right] = \\ &= 0,889996\,[83\,333,33\cdot 11,469921 - 666\,666,66] = 257\,351,33\end{aligned}$$

En el segundo caso,

$$\begin{aligned}_{3}/V_0(10\,000;2\,000)_{\overline{\infty|}0,06} &= (1+0,06)^{-3}V_0(10\,000;2\,000)_{\overline{\infty|}0,06} = \\ &= (1+0,06)^{-3}\left(10\,000+\frac{2\,000}{0,06}\right)\frac{1}{0,06} = \\ &= 0,839619\cdot 722\,222,22 = 606\,391,70\end{aligned}$$

6.6. Rentas variables fraccionadas

En las rentas constantes y en general, el tipo de interés i y el período de vencimiento del capital n deben estar expresados en las misma unidad. En las rentas fraccionadas variables, supuesto muy habitual en el mercado, el capital vence en una unidad inferior a la del tanto. Para resolver este supuesto, podemos sustituir todos los capitales pertenecientes a los subperíodos por un único expresado en la misma unidad de tiempo que la razón de la variación o utilizar las siguientes expresiones.

6.6.1. Rentas variables fraccionadas en progresión geométrica

Partiendo de la expresión (6.15),

$$V_0^{(m)}(C,q)_{\overline{n}|i} = C\ m\ \frac{i}{J^{(m)}}\ \frac{1-q^n\ (1+i)^{-n}}{1+i-q} \tag{6.42}$$

■

El resto de valores, podrán obtenerse aplicando las relaciones conocidas.

6.6.2. Rentas variables fraccionadas en progresión aritmética

La expresión matemática para el cálculo en el caso de rentas variables siguiendo una progresión aritmética, obtenida a partir de (6.29) sería:

$$V_0^{(m)}(C,d)_{\overline{n}|i} = \frac{i}{J^{(m)}}\ \left(C\ m + \frac{d}{i} + d\ n\right) \mathrm{a}_{\overline{n}|i} - \frac{d\ n}{i} \tag{6.43}$$

■

El resto de valores se obtendrían multiplicando por sus relaciones.

6.7. Rentas variables en general con rédito periodal constante

En muchas operaciones financieras los términos de las mismas no son constantes, ni tampoco variables en base a una progresión conocida. En realidad, son variables de forma aleatoria.

En estos casos, existe la dificultad técnica de poder calcular la rentabilidad de la operación. Para ello, y tanto para las operaciones de inversión como las de financiación, se utilizan diferentes métodos. Los más extendidos son el *Valor Actual Neto*, (VAN) o (VNA), y el denominado tanto o *Tasa Interna de Rendimiento* o retorno (TIR).

Así, ante una operación financiera consistente en el intercambio de capitales financieros cuyos términos no son iguales en capitalización compuesta,

$$V_0 = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

si igualamos a 0, podemos obtener el valor de i. Definiremos TIR de esta operación financiera al número real i, solución de la ecuación:

$$\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} = \sum_{t=1}^{n} C_t(1+i)^{-t}$$

■

Evidentemente, n e i, deberán estar expresados en la misma unidad. La TIR obtenida estará en función de la unidad de tiempo con la que se esté trabajando. Si es el año, la TIR será el interés efectivo anual; si por el contrario la unidad de tiempo fuera una fracción de m, entonces la TIR expresada como tasa anual equivalente vendrá dada por $i = \left(1+i^{(m)}\right)^m - 1$.

Hay que tener en cuenta que para las operaciones financieras generales, la TIR no siempre existe ni tiene por qué ser única. De hecho, constituye una ecuación algebraica de grado p, siendo $p \geq (m+n)$ que puede presentar hasta p soluciones reales.

Si existe la TIR y es positiva, puede interpretarse como el tipo de interés efectivo periodal constante que bajo el régimen de capitalización compuesta iguala el valor financiero de los capitales de la prestación con el valor financiero de los capitales de la contraprestación, es decir, como la remuneración o coste que supone para las partes llevar a cabo la operación financiera.

Para su cálculo, podemos emplear:

- Métodos directos, que permiten obtener i a través del cálculo de la tasa de retorno resultante como:
  - Método de Newton,
  - Una calculadora financiera,
  - Una hoja de cálculo,
- Métodos aproximados, como:
  - La interpolación lineal, y
  - La aproximación de Schneider.

6.7.1. Determinación de i. Método de Newton

En general, no existe una fórmula que permita calcular las raíces de la ecuación que se plantea para la obtención de la TIR de las operaciones financieras. El método de Newton [14], constituye un método numérico para obtener dichas raíces cuando los capitales de la prestación preceden a los de la contraprestación.

En este caso, por las propiedades de $g(i)$, resulta particularmente simple y eficiente la aplicación de éste método de la tangente. Consiste básicamente en lo siguiente:

Fijado un valor inicial para la variable incógnita i_0, se calcula a partir de el un nuevo valor i_1, utilizando un algoritmo $i_1 = F(i_0)$ que garantice que la distancia de i_1 a la solución de la ecuación $g(i) = 0$ (solución que denotaremos como i^*) sea menor que la distancia de i_0 a la misma. Este algoritmo se repetirá hasta que se alcance un nivel de error lo suficientemente pequeño.

Se escoge un valor inicial i_0 lo suficientemente pequeño, de tal forma que $i_0 < i^*$, siendo i^* la TIR. Dado que $g(i)$ es una función creciente y cóncava, la tangente a la curva $g(i)$ en i_0 atravesará el eje de abcisas en un punto i_1 interior al intervalo $[i_0, i^*]$; por tanto, el valor de i_1 proporcionará una aproximación por defecto a la solución i^*. Si se procede de nuevo a trazar una nueva recta tangente a la curva en el punto $(i_1, g(i_1))$, ésta intersectará al eje de abcisas en un punto interior al intervalo $[i_1, i']$. Repitiendo el proceso, y como consecuencia de las propiedades de la función $g(i)$, tras n pasos se verificará la siguiente desigualdad:

$$i_n < i_{n+1} < i^* \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Es inmediato observar que,

$$g'(i_n) = \frac{-g(i_n)}{i_{n+1} - i_n}$$

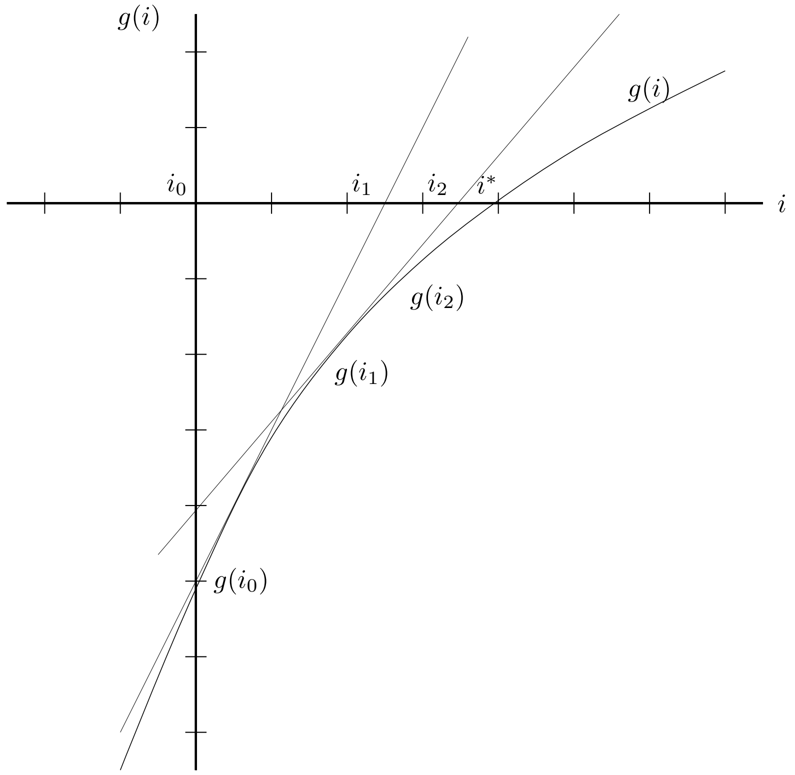

Figura 6.2: Método de Newton. Determinación de i

por lo que,

$$i_{n+1} = i_n - \frac{g(i)}{g'(i_n)'} \tag{6.44}$$

expresión que constituye el algoritmo de Newton para resolver la ecuación que proporciona la TIR de una operación financiera como la descrita.

Repitiendo de forma indefinida este algoritmo se obtiene una sucesión creciente $i_0, i_1, i_2, \cdots$ que se irá aproximando por defecto a i^*. El proceso, se detendrá cuando la mejora obtenida se considere despreciable, esto es, cuando $i_{n+1} - i_n < \epsilon$ siendo ϵ un número positivo fijado de antemano.

Ejemplo 6.5 En una operación financiera en la que se imponen 5 000 € y al cabo de 4 años el montante es de 6 324,30 €, determinar el tipo de interés i de la misma.

Utilizando la expresión (4.3) de la página 35: $C_0 = C_n\ (1+i)^{-n}$

$$5\,000 = 6\,324,30\ (1+i)^{-4} \qquad\qquad g(i) = 5\,000 - 6\,324,30\ (1+i)^{-4} = 0$$

Si $i = 0$

$$5\,000 - 6\,324,30 = -1\,324,30$$

$$g'(i) = 6\,324,30 \cdot 5(1+i)^{-5}$$

$$g'(i_0) = g'(0) = 31\,621,50 - 6\,324,30 = 25\,297,20$$

Si $i = 1$

$$i_1 = i_0 - \frac{g(i_0)}{g'(i_0)} = 0 - \frac{-1\,324,30}{25\,297,20} = 0,0523497$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_1 - i_0 = 0,0523497 > \epsilon$, y repetimos el proceso.

$$g(i_1) = 5\,000 - 6\,324,30\ (1+0,0523497)^{-4} = -156,69$$

$$g'(i_1) = 6\,324,30 \cdot 4(1+i)^{-5}$$
$$g'(i_1) = g'(0,053497) = 19\,600,72$$

Si $i = 2$
$$i_2 = i_1 - \frac{g(i_1)}{g'(i_1)} = 0,0523497 - \frac{-156,69}{19\,600,72} = 0,0603438$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_2 - i_1 = 0,0603438 - 0,0523497 = 0,0079941$, y repetimos el proceso.

$$g(i_2) = 5\,000 - 6\,324,30\ (1 + 0,0603438)^{-4} = -2,9441840$$
$$g'(i_2) = 6\,324,30 \cdot 4(1+i)^{-5}$$
$$g'(i_2) = g'(0,0603438) = 18\,872,91$$

Si $i = 3$
$$i_3 = i_2 - \frac{g(i_2)}{g'(i_2)} = 0,0603438 - \frac{-2,9441840}{18\,872,91} = 0,0604998$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_3 - i_2 = 0,0604998 - 0,0603438 = 0,0001560 > \epsilon$, repetimos el proceso.

$$g(i_3) = 5\,000 - 6\,324,30\ (1 + 0,0604998)^{-4} = -0,0010920$$
$$g'(i_3) = 6\,324,30 \cdot 4(1+i)^{-5}$$
$$g'(i_3) = g'(0,0604998) = 18\,859,03$$

Si $i = 4$
$$i_4 = i_3 - \frac{g(i_3)}{g'(i_3)} = 0,0604998 - \frac{-0,0010920}{18\,859,03} = 0,0604999$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_4 - i_3 = 0,0604999 - 0,0604998 = 0,0000001$, y como $i_4 - i_3 < \epsilon$, terminamos el proceso de iteración. La raíz de la ecuación $g(i) = 0$, es $i^* = 0,0604999 \approx 6,05\,\%$ con un error de aproximación de 0,0001.

6.7.2. Hoja de cálculo

Empleando una hoja de cálculo como Excel o Calc contamos con dos funciones para la obtención de la tasa de interés o valor de i.

La función `TASA`, devuelve la tasa de interés por período de una anualidad. Así mismo, resuelve cualquiera de las cinco variables de la ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales (6.14). `TASA` se calcula por iteración y puede tener cero o más soluciones. Si los resultados sucesivos de `TASA` no convergen dentro de 0,0000001 después de 20 iteraciones, `TASA` devuelve el valor de error `#¡NUM!`

La sintaxis en Excel, sería:

```
TASA(nper;pago;va;[vf];[tipo];[estimar])
```

Puede verse la función `VA` en la ayuda de Excel para obtener una descripción completa de los argumentos `nper; pago; va; vf` y `tipo`. No obstante, las variables, se pueden describir del siguiente modo y con la correspondencia a las que venimos empleando.

`nper`	n	es el número total de períodos de pago en una anualidad.
`pago`	C	es el pago efectuado en cada período, que no puede variar durante la vida de la anualidad. Generalmente el argumento pago incluye el capital y el interés, pero no incluye ningún otro arancel o impuesto. Si se omite el argumento pago, deberá incluirse el argumento vf.
`va`	V_0	es el valor actual, es decir, el valor que tiene actualmente una serie de pagos futuros.
`vf`	V_n	es el valor futuro o un saldo en efectivo que desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se asume que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).
`tipo`		es el número 0 ó 1 e indica el vencimiento de los pagos, esto es, la consideración de pospagable o prepagable.

La sintaxis de las funciones es:

```
NPER(tasa;pago;va;[vf];[tipo])
PAGO(tasa;nper;va;vf;[tipo])
VA(tasa;nper;pago;[vf];[tipo])
VF(tasa;nper;pago;[va];[tipo])
```

que permiten obtener las otras variables vistas. ∎

La función `TIR` devuelve la tasa interna de retorno de los flujos de caja representados por los números del argumento `valores`. Estos flujos de caja o términos no tienen por que ser constantes, como es el caso en una anualidad como hemos visto en `TASA`. Sin embargo, los flujos de caja deben ocurrir en intervalos regulares, como años o meses. La tasa interna de retorno equivale al tipo o tasa de interés i obtenida por un proyecto de inversión que se produce en períodos regulares.

La sintaxis en Excel, sería:

```
TIR(valores; [estimar])
```

Con los siguientes argumentos:

Son `valores` obligatorios una matriz o una referencia a celdas que contienen los números o términos para los cuales desea calcular la tasa interna de retorno. El argumento `valores` debe contener al menos un valor positivo y uno negativo para calcular la tasa interna de retorno. La `TIR` interpreta el orden de los flujos de caja siguiendo el orden del argumento `valores`. Asegúrese de escribir los importes de los pagos e ingresos en el orden correcto. Si un argumento matricial o de referencia contiene texto, valores lógicos o celdas vacías, esos se pasan por alto.

El valor `estimar` es opcional. Se puede utilizar un número que el usuario estima que se aproximará al resultado de `TIR`. Excel utiliza una técnica iterativa para el cálculo de `TIR`. Comenzando con el argumento `estimar`, `TIR` reitera el cálculo hasta que el resultado obtenido tenga una exactitud de 0,00001 %. Si la `TIR` no llega a un resultado después de 20 intentos, devuelve el valor de error `#¡NUM!`. En la mayoría de los casos no necesita proporcionar el argumento `estimar` para el cálculo de la `TIR`. Si se omite el argumento `estimar`, se supondrá que es 0,1 (10 %). Si la `TIR` devuelve el valor de error `#¡NUM!`, o si el valor no se aproxima a su estimación, realice un nuevo intento con un valor diferente.

La `TIR` está íntimamente relacionada al `VNA`, la función valor neto actual. La tasa de retorno calculada por `TIR` es la tasa de interés correspondiente a un valor neto actual 0 (cero). `VNA(TIR(...);...)` = 0. ∎

La función `VNA` (VAN) calcula el valor neto presente de una inversión a partir de una tasa de descuento y una serie de pagos futuros (valores negativos) e ingresos (valores positivos) según la convención de flujos (véase B.1 en la página 160).

La sintaxis en Excel:

```
VNA(tasa;valor1;[valor2];...)
```

que tiene los siguientes argumentos:

`tasa` que es obligatorio. La tasa de descuento a lo largo de un periodo.

`valor1; valor2;...` `valor1` es obligatorio, los `valores` siguientes son opcionales. `valor1; valor2;...` deben tener la misma duración y ocurrir al final de cada periodo. `VNA` utiliza el orden de `valor1; valor2;...` para interpretar el orden de los flujos de caja. Deben escribirse los valores de los pagos y de los ingresos en el orden adecuado. Los argumentos que sean celdas vacías, valores lógicos o representaciones textuales de números, valores de error o texto que no se pueden traducir a números, no se consideran.

Si un argumento es una matriz o una referencia, sólo se considerarán los números de esa matriz o referencia. Se pasan por alto el resto de celdas.

La inversión `VNA` comienza un periodo antes de la fecha del flujo de caja de `valor1` y termina con el último flujo de caja de la lista. El cálculo `VNA` se basa en flujos de caja futuros. Si el primer flujo se produce al principio del primer periodo, el primer valor se debe agregar al resultado `VNA`, que no se incluye en los argumentos valores.

Si n es el número de flujos de caja de la lista de valores, la expresión de `VNA` es:

$$VNA = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_s}{(1+i)^s}$$

`VNA` es similar a la función `VA` (V_0 valor actual). La principal diferencia entre `VA` y `VNA` es que `VA` permite que los flujos de caja comiencen al final o al principio del periodo. A diferencia de los valores variables de flujos de caja en `VNA`, los flujos de caja en `VA` deben permanecer constantes durante la inversión. `VNA` también está relacionado con la función `TIR` (tasa interna de retorno). `TIR` es la tasa para la cual `VNA` se iguala a cero: `VNA(TIR(...);...) = 0`. ■

6.7.3. Simplificación de Schneider

En este caso, Erich Schneider [19] propone la sustitución de la ley financiera de descuento compuesto por el descuento simple.

$$V_0 = C_1(1-i) + C_2(1-2\ i) + \cdots + C_n(1-n\ i)$$

de donde,

$$i = \frac{-V_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k}{\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_k} \tag{6.45}$$

La fórmula (6.45) sólo nos proporciona un valor aproximado de i (la tasa de retorno). Esta aproximación será tanto mayor cuanto menor sea el valor de i, ya que así, menor será el valor de los términos que se desprecian. ■

Ejemplo 6.6 De un préstamo por 1 000 000 €, los gastos de formalización, ascienden a 30 000 € (el 3 %). El préstamo, se valora al 5 % de interés efectivo pagadero por anualidades vencidas en 4 años. Determinar la TAE.

$$V_0 = C\ a_{\overline{n}|i}$$

$$1\,000\,000 = C\ a_{\overline{4}|0,05} \qquad C = \frac{1\,000\,000}{a_{\overline{4}|0,05}} = 282\,011,83$$

Si el valor recibido es: $1\,000\,000 - 30\,000 = 970\,000$, el interés efectivo i, sería:

$$970\,000 = 282\,011,83\ a_{\overline{4}|i}$$

1. Por el valor actual, utilizando una calculadora financiera u hoja de cálculo:

$$970\,000 = \frac{282\,011,83}{(1+i)^1} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^2} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^3} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^4}$$

igualando y resolviendo, $i = 6{,}32\,\%$. Con la calculadora financiera, i,

970000 $\boxed{\text{PV}}$ 4 $\boxed{\text{n}}$ 282011, 83 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$ $\boxed{\text{i}}$ obteniendo 6, 32

2. Interpolando,

$$\frac{970\,000}{282\,011,83} = 3,439572$$

utilizando la aproximación de la interpolación lineal (véase A.4 en la página 149) y obteniendo los valores en las tablas financieras (véase C.3 en la página 168),

$$\frac{3,4395 - 3,3872}{3,4651 - 3,3872} = \frac{i - 0,07}{0,06 - 0,07}$$

$$i = (0,672298 \cdot -0,01) + 0,07 \qquad i = 0,063277 \qquad i = 6,32\,\%$$

3. Utilizando la aproximación de Schneider (6.45)

$$V_0 = C(1-i) + C(1-2\,i) + \cdots + C(1-n\,i)$$

$$\begin{aligned} 970\,000 = {} & 282\,011,83(1-i) + 282\,011,83(1-2\,i) + \\ & + 282\,011,83(1-3\,i) + 282\,011,83(1-4\,i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 970\,000 = {} & (282\,011,83 \cdot 4) - (282\,011,83 + 282\,011,83 \cdot 2 + \\ & + 282\,011,83 \cdot 3 + 282\,011,83 \cdot 4)i \end{aligned}$$

$$i = \frac{-970\,000 + 282\,011,83 \cdot 4}{2\,820\,118,30} \qquad i = 0,0560 \qquad i = 5,60\,\%$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.1 Determinar el valor de una finca que ha sido adquirida por 40 000 € al contado y una renta de 6 000 € pagaderos por semestres vencidos durante 10 años. El tipo de interés al que se valora la operación es el 6 % anual.

Solución: $V_0 = 129\,264,85$

Ejercicio 6.2 Cierta persona tiene dos opciones para pagar una deuda en 10 años: pagar al final de cada cuatrimestre 4 500 €, o bien pagar el último día de cada mes 1 200 €. Si el tanto de valoración es del 6 %, ¿Cuál es la más ventajosa para el acreedor?

Solución: La 2.ª

Ejercicio 6.3 Determinar el valor de una vivienda sabiendo que la cuarta parte de su valor se paga al contado y el resto mediante una renta trimestral de 6 000 € pospagables, comenzando los pagos a los tres años de la compra. La duración es de 20 años y el tanto de valoración el 6 % de interés anual efectivo.

Solución: $V_0 = 315\,021,44$

Ejercicio 6.4 El propietario de un local comercial cobra 3 500 € mensuales de alquiler, el valor del local es de 400 000 €. Se quiere conocer el rendimiento unitario si el cobro se hiciera:

1. Al final de cada mes,
2. Al principio de cada mes.

Solución: 1) $11,02\,\%$ 2) $11,12\,\%$

Ejercicio 6.5 Calcular, en base al 2 % de interés efectivo semestral, el precio a que puede venderse un inmueble cuyos ingresos y gastos, son los siguientes:

- Alquileres: 10 000 € mensuales,
- Gastos generales: 8 000 € trimestrales,
- Impuestos: 2 000 € anuales

Solución: $V_0 = 2\,181\,418,91$

Ejercicio 6.6 ¿Qué cantidad constante debe colocar un ahorrador al principio de cada semestre en un banco que computa intereses al rédito del 3,5 % efectivo anual si se pretende formar en cuatro años un capital de 15 000 €?

Solución: $C = 1\,734$

Ejercicio 6.7 ¿Qué cuantías constantes tendrán las rentas fraccionadas semestrales, trimestrales o mensuales equivalentes a una renta anual de 20 000 € si el tipo de interés efectivo anual es del 5 %?

Solución: $C_{(2)} = 9\,878,03$ $\quad C_{(4)} = 4\,908,89$ $\quad C_{(12)} = 1\,629,65$

Ejercicio 6.8 Si sabemos que el tipo de interés vigente en el mercado es del 5 % nominal anual, se pregunta:

1. ¿Qué diferencia hay entre percibir 12 000 € al final de cada año y percibir 1 000 € al final de cada uno de los meses de ese mismo año?
2. ¿Qué diferencia hay entre percibir 4 000 € al principio de cada año y 1 000 € al principio de cada trimestre?

Solución: 1) $V_n = 278,86$ $\quad$ 2) $V_0 = 73,47$

Ejercicio 6.9 Hallar el valor de una renta inmediata, pospagable, trimestral y perpetua de término 4 500 € utilizando una valoración anual del 6 %.

Solución: $V_0 = 300\,000$

Ejercicio 6.10 Calcular el importe total disponible dentro de diez años en una entidad financiera que capitaliza trimestralmente al rédito del 4 % si se imponen en estos momentos 5 000 € y al final de cada trimestre de los primeros 6 años 1 000 €.

Solución: $V_n = 39\,072,83$

Ejercicio 6.11 ¿Qué capital se formará al cabo de tres años de efectuar imposiciones quincenales de 200 € en un banco que capitaliza al 3,5 % de interés nominal anual.

Solución: $V_n = 15\,171,52$

Ejercicio 6.12 Se desea comprar un piso y se ofrecen las siguientes modalidades de pago:

1. Al contado por 400 000 €
2. Entregando 80 000 € de entrada, 62 500 € dentro de 5 meses y el resto en pagos trimestrales de 10 000 € durante 10 años debiendo efectuar el primero dentro de 9 meses.

3. Entregando 60 000 € de entrada y el resto en mensualidades de 6 500 € durante 7 años venciendo la primera dentro de un mes.

Determinar cuál de las opciones es la más barata para el comprador si la operación se valora al 5,26 % de interés efectivo anual.

Solución: La 1.ª

Ejercicio 6.13 En una línea de ferrocarril existe un paso a nivel que tiene que ser guardado por vigilantes cuyos salarios ascienden a 1 000 € mensuales.

La construcción de un puente en dicho paso a nivel asciende a 68 000 € y tiene que ser reemplazado cada veinte años. Además, el coste de mantenimiento anual del mismo es de 3 000 €.

Estudiar si interesa a la compañía la construcción del citado puente si el tipo de interés efectivo anual es del 12 % o del 14 %. ¿Cuál será el tipo de interés que haga indiferente las dos opciones?

Solución: Al 12 % el puente, al 14 % el vigilante. $i = 12,1\,\%$

Ejercicio 6.14 Una persona impone un capital determinado al 7,5 % de interés compuesto al principio de un cierto año. Tres años después se le asocia otra persona con un capital tres veces mayor.

Si al cabo de diez años la ganancia producida en conjunto para ambos asciende a 607 635,80 €, ¿cuál será el capital aportado por cada socio y la ganancia que les corresponde?

Solución: $C = 200\,000$ a) $212\,206,31$ b) $395\,429,49$

Ejercicio 6.15 ¿Qué capital debemos imponer en un banco que abona intereses del 4,5 % anual para que este sea suficiente para cubrir los gastos de un negocio durante 10 años, sabiendo que el año anterior ascendieron a 10 000 € y se prevee un aumento anual del 3 %. Se supone que la totalidad de los gastos, se abonan al final de cada año.

Solución: $V_0 = 92\,435,66$

Ejercicio 6.16 Para formar un capital de 1 000 000 € se deposita durante 8 años, y al principio de cada uno de ellos una anualidad al 5 % de interés compuesto, siendo cada año 3 700 € mayor que la del año anterior. Determinar el valor de la primera imposición.

Solución: $C = 87\,730,37$

Ejercicio 6.17 Determinar el valor actual de una renta pospagable de 15 términos sabiendo que la cuantía del primer término es de 2 500 € y los siguientes aumentan cada año en 100 € si el tipo de interés es del 5 %.

Solución: $V_0 = 32\,277,95$

Ejercicio 6.18 Hallar la razón de las anualidades de una renta perpetua pospagable que varía en progresión geométrica, siendo su primer término 5 000 €; el tipo de interés, 6 % y habiendo pagado por ellas 250 000 €

Solución: $q = 1,04$

Ejercicio 6.19 Una persona impone a interés compuesto el 1 de enero la cantidad de 5 000 €, y el primero de cada año sucesivas sumas que exceden en 100 € a la precedente. El 1 de julio de cada año retira: el primer año 1 000 €, y cada año sucesivo una cantidad vez y media mayor de la anterior (1 500, 2 250, 3 375, etc.) ¿Qué capital tendrá al cabo de cinco años de la primera imposición. Si los intereses se capitalizan semestralmente, en 30 de junio y 31 de diciembre de cada año, al tipo de interés del 2 % semestral?

Solución: $C_n = 15\,133,90$

Ejercicio 6.20 Calcular el valor actual de los ingresos que percibirá una empresa en los próximos seis años sabiendo que la producción del primer año se valora en 1 000 000 € y que será incrementada cada año sobre el anterior en 200 000 € si para la valoración se utiliza el rédito anual constante del 5 %.

Solución: $V_0 = 7\,469\,290,82$

Ejercicio 6.21 Valorar la corriente de ingresos que percibirá un determinado trabajador durante los próximos 8 años sabiendo que su sueldo actual es de 40 000 € anuales y que se prevé un aumento anual acumulativo del 2,5 % si se utiliza como rédito de valoración constante el 6 % anual.

Solución: $V_0 = 269\,210,23$ $\quad V_n = 429\,080,20$

Ejercicio 6.22 Calcular el valor actual de una renta pospagable de las siguientes condiciones:

1. Los términos varían en progresión geométrica de razón 0,95 siendo la cuantía del primero 100 000;
2. La duración de la renta es de 12 años;
3. El tipo de interés durante los seis primeros años es del 7 % y el 9 % para los restantes 6 años.

Solución: $V_0 = 621\,667,65$

Ejercicio 6.23 Una persona impone en un banco el primero de enero de cierto año la cantidad de 10 000 € y en la misma fecha de cada año de los siguientes impone una cantidad que es un 10 % mayor que la del año anterior. ¿Qué capital reunirá al cabo de 8 años de efectuar la primera imposición si la entidad capitaliza al tanto del 5 % anual?

Solución: $\ddot{V}_n = 139\,888,01$

Ejercicio 6.24 Calcular el valor actual de una renta pospagable de 10 términos anuales cuyos tres primeros son de 8 000 €, cada uno, los cuatro siguientes de 12 000 € y los restantes de 13 000 €. Si el tipo de interés aplicable es del 6 % para los cuatro primeros y del 8 % para los restantes.

Solución: $V_0 = 76\,450,72$

Ejercicio 6.25 ¿Qué cantidad se ingresará en un banco que capitaliza al 8 % anual para que éste abone, a fin de cada año y durante doce, una renta cuyo primer término es de 50 000 € aumentando cada año un veinteavo del anterior.

Solución: $V_0 = 478\,067,91$

Ejercicio 6.26 Hallar la razón de los términos de una renta perpetua pospagable que varía en progresión geométrica siendo su primer término 60 000 €, el tipo de interés el 10 % y se ha pagado por ella 1 000 000 €.

Solución: $q = 1,04$

Ejercicio 6.27 En concepto de ingresos netos un inversor percibe las siguientes rentas:

Período	Concepto	Importe
0	Inversión inicial	180 000
1	Ingresos	12 000
2	Ingresos	30 000
3	Ingresos	40 000
4	Inversión	6 000
4	Ingresos	55 000
5	Ingresos	60 000

Determinar al 5 % el VAN y obtener la TIR.

Solución: $VAN = -19\,483,05$ $\quad TIR = 1,67\%$

Ejercicio 6.28 De un catálogo deducimos que la adquisición de una maquinaria puede hacerse abonando en el acto 100 000 € y al término de cada año una anualidad que supera la anterior en un 1/25. Determinar el precio de la misma al contado, sabiendo que son en total diez pagos a realizar y que la operación se valora al 7 % de interés compuesto anual.

Solución: $V_0 = 882\,817,29$

Ejercicio 6.29 Calcular los valores actual y final de una renta descrita por:

Período	Importe
0	15 000
1	20 000
2	25 000
3	30 000
4	35 000
5	
6	45 000
7	51 750
8	59 512,50
9	68 439,37
10	78 705,28

si el tipo de interés aplicable es del 8 % para los 5 primeros años y del 10 % para los siguientes.

Solución: $V_0 = 256\,947,11$ $\quad V_n = 608\,031,31$

Ejercicio 6.30 Un industrial adquiere una máquina comprometiéndose a pagarla en diez años en la forma siguiente: al final del primer año 150 000 €, al fin del segundo 170 000 €, al fin del tercero 190 000 €, y así sucesivamente hasta 330 000 € al final del décimo año. Si el tipo de interés aplicado en el contrato es del 4 %, ¿cuál es el valor de la máquina al contado?

Solución: $V_0 = 1\,894\,261,41$

Ejercicio 6.31 Determinar el valor actual a 1 de enero de un trabajador que gana 1 000 € mensuales más dos pagas en 30 de junio y 31 de diciembre si lo valoramos a $i = 3,5\,\%$ durante un año.

Solución: $V_0 = 13\,728,17$

Ejercicio 6.32 Cual es el valor dentro de dos años de una renta obtenida por un trabajador que ingresa 1 100 € mensuales en el primer año y un 6 % más en los siguientes meses del segundo año si lo valoramos a un $i = 4\,\%$.

Solución: $V_n = 28\,224,60$

Ejercicio 6.33 Determinar el ahorro al final de 4 años si los ingresos mensuales son de 1 890 €, los gastos trimestrales ascienden a 890 € el primero y 100 € más cada uno de los siguientes. Además paga 500 € prepagables cada uno de los meses en los 4 años si se valora la operación a un $i = 0,5\,\%$ mensual,

Solución: $V_n = 46\,204,66$

Ejercicio 6.34 Con imposiciones mensuales en un incremento del 4 % se quieren obtener 20 000 € dentro de 6 años. Determinar el importe de la última cuota si $i = 2,5\,\%$.

Solución: $C_{72} = 783,57$

Ejercicio 6.35 Calcular el importe total obtenido a los 3 años por un trabajador que cobra 950 € mensuales con un incremento anual del 2,5 % si se valora al 2 % efectivo anual.

Solución: $V_{36} = 36\,082,99$